Systèmes linéaires

I Généralités:

On part de :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b \end{cases}$$

x_i inconnus

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ second membre

$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$

$\Leftrightarrow AX = B$

Le rang de A est celui du système

Le système (S) est dit compatible lorsque l'ensemble S de ses solution est non vide, il est dit homogène lorsque $B = 0$

Props structurelles: 1) L'ens S_0 des solutions de $AX = 0$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - r$

2) Si $S \neq \emptyset$ et $X_0 \in S$, on a $X \in S \Leftrightarrow X - X_0 \in S_0$

ainsi $S = X_0 + S_0$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^n$ de dim $n-r$

D/ $X \in S \Leftrightarrow AX = B = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in S_0 \Leftrightarrow X \in X_0 + S_0$

Pb compatibilité ($B \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right)$

II Système de Cramer $m = n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

TR- déf : Les props suivantes sont équivalentes

1) A est inversible
2) $\forall B \in \mathbb{K}^n$ $AX = B$ possède une solution et une seule
3) La seule solution de S_0 est 0 ~~donc A≠0~~
4) $\det A \neq 0$

D/ 1) ⇔ 2) car A inversible ⇔ $X \xrightarrow{f_A} AX$ est bijective
2) ⇒ 3) et 3) ⇒ 1) par le th du rang
1) ⇔ 4) $A\tilde{A} = \det A \, I_n$ où $\tilde{A} = {}^t\mathrm{Com}(A)$ } Revoir la dém

Dans ce cas, (S) est dit de Cramer

Formules de Cramer : (→ E.D, généralisées)
On suppose $\det A \neq 0$, soit $(x_1, \dots, x_n)$ la sol de S, $A = [C_1, \dots, C_n]$

alors $x_k = \dfrac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det A}$

D/ Écrivons $B = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$

il vient $\det(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(C_1, \dots, C_{k-1}, C_i, C_{k+1}, \dots, C_n)$$

$$= x_k \det(C_1, \dots, C_n)$$

Ex : $n = 2$ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ si $ab' - b'a' \neq 0$ à retenir

il vient $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$

Exo (Hadamard) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

S/ On part de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tq $AX = 0$ Supposons $X \neq 0$

Soit i_0 $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, la ligne i_0 de $AX = 0$

donne $a_{i_0 i_0} x_{i_0} = - \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j$

$$|a_{i_0 i_0}| \underbrace{|x_{i_0}|}_{>0} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{ij}|$$

contradiction

$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $X \longmapsto AX$

III Valeurs propres et systèmes homogènes

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, λ est une vp de $A \iff \mathrm{Ker}(f_A - \lambda I) \neq \{0\}$

$\iff \det(A - \lambda I) = 0 \iff$ le système $(A - \lambda I) X = 0$ a une sol $\neq 0$

Exo Toutes les Vp complexes de A appartiennent à

$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{ii}, r_i)$ où $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

S/ Si $\lambda \notin \bigcup_{1}^{n} \overline{D}(a_{ii}, r_i)$ il vient

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{ii} - \lambda| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}$$

On applique Hadamard $A - \lambda I$ est inversible

Calcul pratique :

Soit λ une valeur propre de A, notons $r = \mathrm{rg}(A - \lambda I)$ $(< n)$

On se donne r lignes indépendantes de $A - \lambda I$ (

par ex $i = 1 \dots r$

les $n - r$ lignes restantes sont alors CL des r premières donc $S \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rm}x_m = 0 \end{cases}$

La matrice $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}-\lambda & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}$ est de rang r

elle a donc r colonnes indép, par ex $j = 1 \ldots r$

notons $B = A - \lambda I$: $\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1r}x_r + (b_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + b_{1m}x_m) = 0 \\ b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rr}x_r + (b_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + b_{rm}x_m) = 0 \end{cases}$

Si l'on se donne arbitrairement $x_{r+1} \ldots x_m$, les $x_1 \ldots x_r$ sont déterminés par un système de Cramer

Ex : $r = m-1$ $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + \cdots + a_{1m-1}x_{m-1} + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m-1\,1}x_1 + \cdots + (a_{m-1\,m-1}-\lambda)x_{m-1} + a_{m-1\,m}x_m = 0 \end{cases}$

x_m donnée = second membre

130